

# 强杂波背景下基于变分贝叶斯推理的机载雷达目标跟踪算法

李淑慧<sup>1</sup>, 邓志红<sup>1</sup>, 冯肖雪<sup>1</sup>, 潘峰<sup>1,2</sup>

(1. 北京理工大学自动化学院, 北京 100081; 2. 昆明北理工产业技术研究院有限公司, 云南昆明 650000)

**摘要:** 机载雷达遭受的强杂波干扰以及目标的强机动使噪声呈现长拖尾的非高斯特性. 此外, 载机的运动导致杂波淹没目标的航迹, 使雷达无法检测到目标, 出现随机的量测丢失现象. 为此, 设计了强杂波背景下含量测丢失的目标跟踪算法. 该算法采用学生t分布来模拟非高斯噪声的长拖尾特性. 通过引入伯努利随机变量, 将求和形式的后验概率密度函数转换成乘积形式的概率质量函数, 并构建了分层状态空间模型. 在此基础上, 设计了用于量测丢失的鲁棒变分贝叶斯平滑器. 以机载雷达跟踪空中目标为例验证了本文算法的有效性.

**关键词:** 机载雷达; 杂波; 量测丢失; 概率图模型; 变分贝叶斯推理; 多变量学生t分布

中图分类号: TN953

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2022)05-1089-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20210374

## Variational Bayesian Inference-Based Airborne Radar Target Tracking Algorithm in Strong Clutter

LI Shu-hui<sup>1</sup>, DENG Zhi-hong<sup>1</sup>, FENG Xiao-xue<sup>1</sup>, PAN Feng<sup>1,2</sup>

(1. School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. Kunming-BIT Industry Technology Research Institute INC, Kunming, Yunnan 650000, China)

**Abstract:** The strong clutter interference suffered by the airborne radar and the strong maneuvering of the target make noise non-Gaussian and heavy-tailed. Besides, the movement of the carrier aircraft induces the target is totally submerged by the clutter, so that the radar cannot detect the target. To this end, a target tracking algorithm for missing measurements in strong clutter is designed. Student t distribution is utilized to model the heavy-tailed property of non-Gaussian noise. The posterior probability density function(PDF) of the summation form is converted into the probability mass function(PMF) of the product form by introducing Bernoulli random variables. And a hierarchical state space model is further devised. Based on this model, a robust variational Bayesian smoother for measurement dropouts(RVBSD) is designed. An example that the airborne radar tracks an airborne target is given to verify the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** airborne radar; clutter; missing measurement; probabilistic graph model; variational Bayesian inference; multivariable Student t distribution

### 1 引言

机载雷达作为一种对地观测的重要传感器, 具有全天候、全天时、高分辨的特点, 能实现目标的探测、识别和估计等功能, 因此受到军事领域的广泛关注. 但是, 机载雷达常常工作于复杂多变的恶劣环境, 使得目标跟踪面临的不确定性问题异常突出: (1) 机载雷达一般处于平视或下视工作状态, 必然受到比地基雷达更为严重的地

(海)杂波<sup>[1]</sup>. 雷达杂波的脉冲干扰会使机载雷达系统的量测噪声呈现复杂、未知的非高斯长拖尾特性<sup>[2,3]</sup>. (2) 实际作战环境中, 机载雷达跟踪的敌方目标(如坦克、战车、无人机等)往往具有较强的机动性. 敌方目标的强机动会使目标跟踪模型中的状态量发生突变, 进而诱导未知的非高斯长拖尾系统噪声<sup>[4]</sup>. (3) 载机的运动导致其杂波分布范围广、强度大, 尤其在城市和山区地带, 副瓣杂波

收稿日期: 2021-03-21; 修回日期: 2021-06-07; 责任编辑: 覃怀银

基金项目: 国家自然科学基金(No.61433003, No.61603040); 广东省科技创新战略专项基金(No.skjtdzxrwd2018001); 云南省科技厅重点研究项目(No.2018BA070); 云南省应用基础研究项目(No.201701CF00037)

通常会淹没落入杂波区的目标,使机载雷达无法检测到目标,出现随机的目标航迹丢失(即量测丢失)现象<sup>[5]</sup>. 总之,由于复杂的作战环境以及目标机动特性带来的不确定性因素给机载雷达目标跟踪带来了巨大的挑战. 因此,研究含量测丢失和未知长拖尾非高斯噪声的机载雷达目标跟踪问题具有十分重要的意义.

目前,已有大量的文献研究含未知噪声的状态估计问题<sup>[6]</sup>. 例如, Ardeshiri 等<sup>[6]</sup>针对过程噪声协方差和量测噪声协方差均未知的状态估计问题,采用变分贝叶斯方法设计了近似贝叶斯平滑器. 然而,该算法只适用于高斯噪声场景. 为此,一些学者也针对含未知长拖尾非高斯噪声的非线性系统状态估计问题开展了研究<sup>[7-10]</sup>. 赵俊波等<sup>[8]</sup>针对含未知过程噪声协方差和量测噪声协方差的非线性系统,设计了鲁棒的无迹卡尔曼估计器. 黄玉龙等<sup>[10]</sup>针对含长拖尾过程和测量噪声的非线性系统,提出了鲁棒的状态平滑器. 该算法凭借变分推理逼近真实后验PDF(Probability Density Function)的优势,联合估计出长拖尾非高斯噪声的自由度、尺度矩阵和系统状态. 上述算法均不适用量测丢失的场景.

近年来,研究人员也针对含量测丢失的非线性系统状态估计问题进行研究<sup>[11-14]</sup>. 马柯茂等<sup>[11]</sup>针对含高斯噪声的非线性系统,采用量测丢失补偿的方法设计了用于量测丢失的状态估计方法. 然而,该算法难以应用于长拖尾非高斯噪声场景. 江顺等<sup>[12]</sup>针对含延时和随机量测丢失的网络化非线性系统,设计了故障估计器. 虽然该算法适用于非高斯噪声,但它要求噪声协方差有界且已知,量测丢失概率恒定已知,且状态估计的精度较低. 上述算法只适用于噪声已知的场景,尚不能处理量测丢失概率和噪声均未知的情况.

由于机动目标跟踪场景复杂,未知的长拖尾非高斯噪声和量测丢失不可避免地同时存在于真实系统中. 现有的算法均无法解决同时含量测丢失和未知长拖尾非高斯噪声的状态估计问题. 为此,本文研究强杂波背景下含量测丢失的机动目标跟踪问题.

## 2 问题描述

考虑到复杂的作战环境、强杂波以及目标强机动等因素的影响,本文研究了如下的机载雷达目标跟踪系统<sup>[4,15,16]</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \bar{\mathbf{w}}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k &= \ell_k h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k^t) + \bar{\mathbf{v}}_k \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$  是  $k$  时刻目标的状态,  $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^m$  是笛卡尔坐标系下  $k$  时刻雷达接收到的测量,  $f_{k-1}(\cdot)$  和  $h_k(\cdot)$  分别为已知的函数.  $\mathbf{s}_k^t = (x_k^t, y_k^t, z_k^t)$  表示直接利用全球定位系统(Global Positioning System, GPS)得到机载平台的位置. 随机变量  $\ell_k$  服从概率未知的伯努利随机分布,表

示量测数据的丢失情况. 假设初始状态向量  $\mathbf{x}_0$  服从均值为  $\hat{\mathbf{x}}_{00}$ , 协方差为  $\mathbf{P}_{00}$  的高斯分布,且与系统噪声  $\bar{\mathbf{w}}_{k-1}$  和量测噪声  $\bar{\mathbf{v}}_k$  互不相关.

由于闪烁噪声服从长拖尾的非高斯分布<sup>[15]</sup>,同时考虑到目标的闪烁、杂波、强电磁干扰、以及目标强机动等因素的影响,本文采用闪烁噪声来模拟未知的长拖尾过程噪声  $\bar{\mathbf{w}}_{k-1} \in \mathbf{R}^n$  和量测噪声  $\bar{\mathbf{v}}_k \in \mathbf{R}^m$ . 此外,由于学生  $t$  分布可以视为无穷多个高斯分布与长拖尾 Gamma 分布的混合,具有长拖尾非高斯特性,常将闪烁噪声建模为学生  $t$  分布<sup>[17]</sup>. 于是,  $\bar{\mathbf{w}}_{k-1}$  和  $\bar{\mathbf{v}}_k$  分别写成如下等式:

$$\begin{aligned} p_{\bar{\mathbf{w}}}(\bar{\mathbf{w}}_{k-1}) &= \text{St}(\bar{\mathbf{w}}_{k-1}; \mathbf{0}, \mathbf{Q}, \omega) \\ &= \int p(\bar{\mathbf{w}}_{k-1} | \mathbf{s}_{k-1}) p(\mathbf{s}_{k-1}) d\mathbf{s}_{k-1} \\ &= \int_0^{+\infty} \text{N}(\bar{\mathbf{w}}_{k-1}; \mathbf{0}, \mathbf{Q}/\mathbf{s}_{k-1}) G(\mathbf{s}_{k-1}; 0.5\omega, 0.5\omega) d\mathbf{s}_{k-1} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} p_{\bar{\mathbf{v}}}(\bar{\mathbf{v}}_k) &= \text{St}(\bar{\mathbf{v}}_k; \mathbf{0}, \mathbf{R}, \nu) \\ &= \int p(\bar{\mathbf{v}}_k | \lambda_k) p(\lambda_k) d\lambda_k \\ &= \int_0^{+\infty} \text{N}(\bar{\mathbf{v}}_k; \mathbf{0}, \mathbf{R}/\lambda_k) G(\lambda_k; 0.5\nu, 0.5\nu) d\lambda_k \end{aligned} \quad (3)$$

$p_{\bar{\mathbf{w}}}(\cdot)$ ,  $p_{\bar{\mathbf{v}}}(\cdot)$  分别表示过程噪声和量测噪声的PDF,  $\text{St}(\bar{\mathbf{w}}_{k-1}; \mathbf{0}, \mathbf{Q}, \omega)$  和  $\text{St}(\bar{\mathbf{v}}_k; \mathbf{0}, \mathbf{R}, \nu)$  分别表示均值为  $\mathbf{0}$ , 尺度矩阵为  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$ , 自由度参数为  $\omega$  和  $\nu$  的多变量学生  $t$  分布. 在式(2)和式(3)中,引入辅助随机变量  $\mathbf{s}_{k-1}$  和  $\lambda_k$  的作用是为了便于后文设计分层高斯状态空间模型,且它们分别服从如下的 Gamma 分布:

$$p(\mathbf{s}_{k-1} | \omega) = G(\mathbf{s}_{k-1}; 0.5\omega, 0.5\omega) \quad (4)$$

$$p(\lambda_k | \nu) = G(\lambda_k; 0.5\nu, 0.5\nu) \quad (5)$$

由于长拖尾的非高斯噪声未知,常常无法获得准确的尺度矩阵和自由度参数. 假设尺度矩阵  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  的先验分布分别服从逆 Wishart 分布<sup>[10]</sup>, 即

$$\mathbf{Q} \sim \text{IW}(\mathbf{Q}; t_0, \mathbf{T}_0), \quad \mathbf{R} \sim \text{IW}(\mathbf{R}; u_0, \mathbf{U}_0) \quad (6)$$

其中,  $t_0, u_0$  分别表示自由度参数,  $\mathbf{T}_0, \mathbf{U}_0$  分别为逆尺度参数. 未知的自由度参数  $\omega, \nu$  分别服从 Gamma 先验分布, 即

$$\omega \sim G(\omega; s_0, r_0), \quad \nu \sim G(\nu; g_0, h_0) \quad (7)$$

此外,  $\mathbf{x}_0, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \omega, \nu$  的联合先验概率分布服从如下等式:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_0, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \omega, \nu) &= \text{IW}(\mathbf{Q}; t_0, \mathbf{T}_0) \text{IW}(\mathbf{R}; u_0, \mathbf{U}_0) \\ &\quad \times p(\mathbf{x}_0) G(\omega; s_0, r_0) G(\nu; g_0, h_0) \end{aligned} \quad (8)$$

此外,由于地(海)杂波以及载机运动的影响,副瓣杂波通常会淹没落入杂波区的目标,使机载雷达无法检测的目标,出现随机的量测丢失现象. 当  $\ell_k = 1$  时,表示  $k$  时刻雷达检测到目标. 当  $\ell_k = 0$  时,表示  $k$  时刻雷达丢失目标. 随机变量  $\ell_k$  满足如下PDF:

$$p(\ell_k = 1 | \bar{\pi}_k) = \bar{\pi}_k \quad (9)$$

$$p(\ell_k = 0 | \bar{\pi}_k) = 1 - \bar{\pi}_k \quad (10)$$

$\bar{\pi}_k$  为  $k$  时刻目标的检测概率. 由于雷达自身的性能(如频率的稳定性、雷达平台的飞行特性等)、目标的性能(如目标的运动特性、雷达的散射面积大小)以及雷达工作的环境特性(如杂波特性和传输特性等)等因素往往会影响到雷达检测目标的性能(即目标检测概率). 由于上述各种复杂因素的影响, 目标的检测概率是时变未知的. 鉴于 Beta 分布可以模拟各种概率分布<sup>[18]</sup>, 本文将用于建模时变未知的目标检测概率  $\bar{\pi}_k$  的先验分布:

$$p(\bar{\pi}_k) = \text{Be}(\bar{\pi}_k; e_0, e_1) \quad (11)$$

其中,  $e_0 \in [0, 1]$  和  $e_1 \in [0, 1]$  为 Beta 分布的先验形状参数.

本文的主要目的在于针对含量测丢失和未知长拖尾非高斯噪声的机载雷达目标跟踪系统式(1), 利用变分贝叶斯方法设计出强杂波背景下含量测丢失的机载雷达机动目标跟踪算法, 进而估计出目标的状态.

### 3 基于变分贝叶斯推理的机载雷达机动目标跟踪算法

#### 3.1 近分层概率图模型

本节的目的是设计分层概率图模型, 为后续变分贝叶斯推理做准备. 当量测丢失概率已知时, 似然概率密度  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  为

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) = \bar{\pi}_k p_v(\mathbf{y}_k - h_k(\mathbf{x}_k)) + (1 - \bar{\pi}_k) p_v(\mathbf{y}_k) \quad (12)$$

由于式(12)中似然 PDF  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  为加和的形式, 很难直接利用变分贝叶斯方法估计出未知的状态. 于是, 将伯努利随机变量  $\ell_k$  的概率转化为乘积形式的概率质量函数,

$$p(\ell_k | \bar{\pi}_k) = \bar{\pi}_k^{\ell_k} (1 - \bar{\pi}_k)^{1 - \ell_k}, \quad \text{s.t. } \ell_k \in \{0, 1\} \quad (13)$$

于是, 似然 PDF  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  可写为

$$\begin{aligned} & p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \\ &= \iiint p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \lambda_k, \ell_k) p(\ell_k | \bar{\pi}_k) p(\lambda_k) \\ & \quad \times p(\bar{\pi}_k) d\ell_k d\lambda_k d\bar{\pi}_k \\ &= \sum_{\ell_k=0}^1 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} [N(\mathbf{y}_k; \mathbf{0}, \mathbf{R}/\lambda_k)]^{(1-\ell_k)} G(\lambda_k; 0.5\nu, 0.5\nu) \\ & \quad \times p(\bar{\pi}_k) [N(\mathbf{y}_k; h_k(\mathbf{x}_k), \mathbf{R}/\lambda_k)]^{\ell_k} \\ & \quad \times p(\ell_k | \bar{\pi}_k) d\lambda_k d\bar{\pi}_k, \quad \text{s.t. } \ell_k \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (14)$$

根据式(1)和式(2)得

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) &= \int_0^{+\infty} N(\mathbf{x}_k; f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}), \mathbf{Q}/s_{k-1}) \\ & \quad \times G(s_{k-1}; 0.5\omega, 0.5\omega) ds_{k-1} \end{aligned} \quad (15)$$

根据式(14)和式(15)得

$$\begin{aligned} & p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}, s_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) \\ &= N(\mathbf{x}_k; f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}), \mathbf{Q}/s_{k-1}) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \lambda_k, \ell_k, \mathbf{R}) \\ &= [N(\mathbf{y}_k; \mathbf{0}, \mathbf{R}/\lambda_k)]^{1-\ell_k} [N(\mathbf{y}_k; h_k(\mathbf{x}_k), \mathbf{R}/\lambda_k)]^{\ell_k} \end{aligned} \quad (17)$$

于是, 式(4)~式(7)、式(11)、式(13)、式(16)和式(17)共同构成了如图1所示的分层概率图模型.

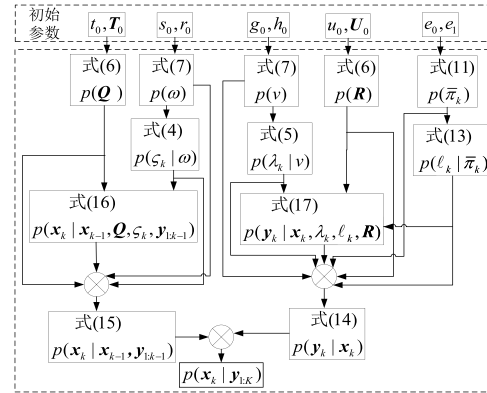


图1 分层概率图模型

#### 3.2 基于变分贝叶斯方法的机载雷达机动目标跟踪算法设计

分层概率图模型中的  $\mathbf{x}_{0:K}, \mathbf{s}_{0:K-1}, \omega, \nu, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \ell_{1:K}, \bar{\pi}_{1:K}, \lambda_{1:K}$  未知. 为了估计这些未知的量, 令  $\Theta_{1:K} \triangleq \{\mathbf{x}_{0:K}, \mathbf{s}_{0:K-1}, \omega, \mathbf{Q}, \ell_{1:K}, \bar{\pi}_{1:K}, \lambda_{1:K}, \mathbf{R}, \nu\}$ . 根据贝叶斯理论, 联合 PDF  $p(\Theta_{1:K}, \mathbf{y}_{1:K})$  为

$$\begin{aligned} p(\Theta_{1:K}, \mathbf{y}_{1:K}) &= p(\mathbf{x}_0) \text{IW}(\mathbf{Q}; t_0, T_0) \text{IW}(\mathbf{R}; u_0, U_0) \\ & \quad \times G(\omega; s_0, r_0) G(\nu; g_0, h_0) \prod_{k=1}^K p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1}) \\ & \quad \times p(\bar{\pi}_k) p(s_{k-1}) p(\lambda_k) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \lambda_k, \ell_k) p(\ell_k | \bar{\pi}_k) \\ &= p(\mathbf{x}_0) \text{IW}(\mathbf{Q}; t_0, T_0) \text{IW}(\mathbf{R}; u_0, U_0) G(\omega; s_0, r_0) \\ & \quad \times G(\nu; g_0, h_0) \prod_{k=1}^K N(\mathbf{x}_k; f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}), \mathbf{Q}/s_{k-1}) \\ & \quad \times G(s_{k-1}; 0.5\omega, 0.5\omega) \bar{\pi}_k^{\ell_k} [N(\mathbf{y}_k; \mathbf{0}, \mathbf{R}/\lambda_k)]^{1-\ell_k} \\ & \quad \times [N(\mathbf{y}_k; h_k(\mathbf{x}_k), \mathbf{R}/\lambda_k)]^{\ell_k} (1 - \bar{\pi}_k)^{(1-\ell_k)} \\ & \quad \times \text{Be}(\bar{\pi}_k; e_0, e_1) G(\lambda_k; 0.5\nu, 0.5\nu) \end{aligned} \quad (18)$$

因为式(18)表达形式复杂, 所以联合 PDF  $p(\Theta_{1:K}, \mathbf{y}_{1:K})$  不存在解析解. 本文利用平均场理论<sup>[18]</sup>和变分贝叶斯方法, 通过寻找一个解析、易分解的近似 PDF 来逼近真实的平滑后验 PDF, 即

$$\begin{aligned} p(\Theta_{1:K} | \mathbf{y}_{1:K}) &\approx \{q(\Theta_{1:K}) \triangleq q(\mathbf{x}_{0:K}) q(\mathbf{s}_{0:K-1}) q(\omega) \\ & \quad \times q(\mathbf{Q}) q(\ell_{1:K}) q(\bar{\pi}_{1:K}) q(\lambda_{1:K}) q(\mathbf{R}) q(\nu)\} \end{aligned} \quad (19)$$

令  $\theta_k$  为  $\Theta_{1:K}$  中的任意元素, 即  $\theta_k \in \Theta_{1:K}$ . 式(19)中的  $q(\theta_k)$  是  $\theta_k$  的近似后验 PDF. 通过最小化近似平滑后验

PDF $q(\Theta_{1:K})$  与 真实后验 PDF $p(\Theta_{1:K}|\mathbf{y}_{1:K})$  之间的 Kullback-Leibler 散度就可以获得  $q(\theta_k)$  的表达式<sup>[10]</sup>, 即

$$\log \hat{q}(\theta_k) = \mathbb{E}_{\Theta_{1:K}}[\log p(\Theta_{1:K}, \mathbf{y}_{1:K})] + c_\theta \quad (20)$$

$$\Theta_{1:K}^{(-\theta_k)} = \Theta_{1:K} - \{\theta_k\} \quad (21)$$

其中,  $\mathbb{E}(\cdot)$  表示期望,  $c_\theta$  是与  $\theta_k$  无关的常数. 由于  $q(\mathbf{x}_{0:K}), q(\mathbf{s}_{0:K-1}), q(\omega), q(Q), q(\ell_{1:K}), q(\bar{\pi}_{1:K}), q(\nu), q(\mathbf{R}), q(\lambda_{1:K})$  的变分参数相互耦合, 不能直接求解式(20), 而需要利用固定点迭代法求解式(20). 固定点迭代法在迭代更新  $q(\mathbf{x}_{0:K}), q(\mathbf{s}_{0:K-1}), q(\omega), q(Q), q(\ell_{1:K}), q(\bar{\pi}_{1:K}), q(\nu), q(\mathbf{R}), q(\lambda_{1:K})$  中的任意 PDF 时, 需要使用其他 PDF 上一次的迭代值<sup>[18]</sup>.

### 3.3 近似后验 PDF 的计算

为了计算近似的平滑后验 PDF, 对式(18)取对数, 即  $\log(p(\Theta_{1:K}, \mathbf{y}_{1:K}))$ . 利用式(20)可依次计算各个近似后验 PDF $q(\theta_k)$  的变分参数.

(1) 当  $\Theta_{1:K}$  中的元素为  $\mathbf{x}_{0:K}$  时, 利用式(18)和式(20),  $q^{(i+1)}(\mathbf{x}_{0:K})$  计算如下:

$$q^{(i+1)}(\mathbf{x}_{0:K}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_0; \hat{\mathbf{x}}_{00}, \mathbf{P}_{00}) \times \prod_{k=1}^K \{ \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}), \hat{Q}_{k-1}^{(i)}) \mathcal{N}(\mathbf{y}_k; h_k(\mathbf{x}_k), \hat{\mathbf{R}}_k^{(i)}) \} \quad (22)$$

根据式(22)可知,  $q^{(i+1)}(\mathbf{x}_{0:K})$  等同于具有修正似然 PDF $\mathcal{N}(\mathbf{y}_k; h_k(\mathbf{x}_k), \hat{\mathbf{R}}_k^{(i)})$  的非线性后验平滑 PDF. 于是, 将含有量测丢失的非线性系统就转化为不含量测丢失等价的非线性高斯系统. 基于高斯平滑器设计原理<sup>[19]</sup>, 状态的更新过程主要包括前向传播和后向传播. 因此, 可得如下等式:

(a) 前向传播

$$\hat{Q}_{k-1}^{(i)} = \frac{[\mathbf{E}^{(i)}(Q^{-1})]^{-1}}{\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{s}_{k-1})}, \quad \hat{\mathbf{R}}_k^{(i)} = \frac{[\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{R}^{-1})]^{-1}}{\mathbf{E}^{(i)}(\lambda_k) \mathbf{E}^{(i)}(\ell_k)} \quad (23)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i+1)} = \int f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{(i+1)}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^{(i+1)}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (24)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{(i+1)} = \hat{Q}_{k-1}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{(i+1)} (\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{(i+1)})^T + \int f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) \times f_{k-1}^T(\mathbf{x}_{k-1}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{(i+1)}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^{(i+1)}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_{yy, k|k}^{(i+1)} = \int h(\mathbf{x}_k) (h(\mathbf{x}_k))^T \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i+1)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i+1)}) d\mathbf{x}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i+1)}) (h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i+1)}))^T + \hat{\mathbf{R}}_k^{(i+1)} \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^{(i+1)} = \int h_k(\mathbf{x}_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i+1)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i+1)}) d\mathbf{x}_k \quad (27)$$

$$\mathbf{P}_{xy, k|k}^{(i+1)} = \int (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i+1)}) (h(\mathbf{x}_k) - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i+1)}))^T \times \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i+1)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i+1)}) d\mathbf{x}_k \quad (28)$$

$$\mathbf{K}_k^{(i+1)} = \mathbf{P}_{xy, k|k}^{(i+1)} (\mathbf{P}_{yy, k|k}^{(i+1)})^{-1} \quad (29)$$

$$\mathbf{x}_{k|k}^{(i+1)} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i+1)} + \mathbf{K}_k^{(i+1)} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^{(i+1)}) \quad (30)$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^{(i+1)} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i+1)} - \mathbf{K}_k^{(i+1)} \mathbf{P}_{xy, k|k}^{(i+1)} \quad (31)$$

(b) 后向传播

$$\mathbf{M}_{k-1}^{(i+1)} = \mathbf{P}_{k-1, k|k-1}^{(i+1)} - (\mathbf{P}_{k|k-1}^{(i+1)})^{-1} \quad (32)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k}^{(i+1)} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{(i+1)} + \mathbf{M}_{k-1}^{(i+1)} (\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i+1)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i+1)}) \quad (33)$$

$$\mathbf{P}_{k-1|k}^{(i+1)} = \mathbf{P}_{k-1|k-1}^{(i+1)} + \mathbf{M}_{k-1}^{(i+1)} (\mathbf{P}_{k|k}^{(i+1)} - \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i+1)}) (\mathbf{M}_{k-1}^{(i+1)})^T \quad (34)$$

其中,  $q^{(i+1)}(\mathbf{x}_{0:K})$  表示第  $i+1$  次迭代的近似后验 PDF.

$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i+1)}, \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i+1)}$  和  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k}^{(i+1)}$  分别为状态的一步预测值、更新值以及平滑估计值;  $\mathbf{P}_{xy, k|k}^{(i+1)}$  表示状态和量测的交叉协方差,  $\mathbf{P}_{yy, k|k}^{(i+1)}$  表示量测的协方差.  $\mathbf{K}_k^{(i+1)}$  为滤波增益矩阵.  $\mathbf{P}_{k|k}^{(i+1)}$  和  $\mathbf{P}_{k-1|k}^{(i+1)}$  分别为状态的滤波估计协方差以及平滑估计协方差. 如式(24)~(28)所示的积分等式可以采用泰勒级数展开法、无迹变化法<sup>[7]</sup>或者容积点采样法<sup>[19]</sup>进行计算. 由于容积点采样法能近似 PDF 三阶以上的统计特性, 故本文采用容积点采样法.

(2) 当  $\Theta_{1:K}$  中的元素为  $\mathbf{s}_{0:K-1}$  时, 利用式(18)和式(20),  $q^{(i+1)}(\mathbf{s}_{k-1})$  可以更新为  $q^{(i+1)}(\mathbf{s}_{k-1}) = \mathcal{G}(\mathbf{s}_{k-1}; \alpha_{k-1}^{(i+1)}, \beta_{k-1}^{(i+1)})$ , 其中,  $\alpha_{k-1}^{(i+1)}, \beta_{k-1}^{(i+1)}$  分别为

$$\alpha_{k-1}^{(i+1)} = 0.5n + 0.5\mathbb{E}^{(i)}(\omega) \quad (35)$$

$$\beta_{k-1}^{(i+1)} = 0.5(\text{tr}(A_k^{(i+1)} \mathbf{E}^{(i)}(Q^{-1})) + \mathbb{E}^{(i)}(\omega)) \quad (36)$$

其中,  $\text{tr}(\cdot)$  表示迹操作.

$$A_k^{(i+1)} = \mathbf{E}^{(i+1)}((\mathbf{x}_k - f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}))(\mathbf{x}_k - f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}))^T) \quad (37)$$

令  $\theta = \ell_{1:K}$ , 利用式(18)得

$$\begin{aligned} \log q^{(i+1)}(\ell_{1:K}) &= \sum_{k=1}^K \{ (1 - \ell_k) (0.5m \mathbb{E}^{(i)}(\log(\lambda_k)) - 0.5\mathbb{E}^{(i)}(\lambda_k)) \mathbf{y}_k^T \\ &\quad \times \mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{R}^{-1}) \mathbf{y}_k - 0.5\mathbb{E}^{(i)}(\log(|\mathbf{R}|)) + \ell_k (0.5m \\ &\quad \times \mathbb{E}^{(i)}(\log(\lambda_k)) - 0.5\mathbb{E}^{(i)}(\log(|\mathbf{R}|)) - 0.5\mathbb{E}^{(i)}(\lambda_k) \\ &\quad \times \text{tr}(\mathbf{B}_k^{(i+1)} \mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{R}^{-1})) + \ell_k \mathbb{E}^{(i)}(\log(\bar{\pi}_k)) + (1 - \ell_k) \\ &\quad \times \mathbb{E}^{(i)}(\log(1 - \bar{\pi}_k)) \} + c_\ell \end{aligned} \quad (38)$$

引入辅助参数  $\delta_{k1}^{(i+1)}, \delta_{k2}^{(i+1)}$ , 即

$$\begin{aligned} \delta_{k1}^{(i+1)} &= 0.5m \mathbb{E}^{(i)}(\log(\lambda_k)) - 0.5\mathbb{E}^{(i)}(\lambda_k) \mathbf{y}_k^T \\ &\quad \times \mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{R}^{-1}) \mathbf{y}_k - 0.5\mathbb{E}^{(i)}(\log(|\mathbf{R}|)) \\ &\quad + \mathbb{E}^{(i)}(\log(1 - \bar{\pi}_k)) \end{aligned} \quad (39a)$$

$$\begin{aligned} \delta_{k2}^{(i+1)} &= 0.5m \mathbb{E}^{(i)}(\log(\lambda_k)) - 0.5\mathbb{E}^{(i)}(\lambda_k) \text{tr}(\mathbf{B}_k^{(i+1)} \\ &\quad \times \mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{R}^{-1})) - 0.5\mathbb{E}^{(i)}(\log(|\mathbf{R}|)) + \mathbb{E}^{(i)}(\log(\bar{\pi}_k)) \end{aligned} \quad (39b)$$

利用式(38),  $\log q^{(i+1)}(\ell_k)$  可更新为如下等式:

$$\begin{aligned} \log q^{(i+1)}(\ell_k) &= \log(\exp(\delta_{k1}^{(i+1)}))^{\ell_k} \\ &\quad + \log(\exp(\delta_{k2}^{(i+1)}))^{1 - \ell_k} \\ &\quad + \log\{(\Lambda_k^{(i+1)})^{\ell_k} (\Lambda_k^{(i+1)})^{1 - \ell_k}\} \\ &= \log(\Lambda_k^{(i+1)} \exp(\delta_{k1}^{(i+1)}))^{\ell_k} \\ &\quad + \log(\Lambda_k^{(i+1)} \exp(\delta_{k2}^{(i+1)}))^{1 - \ell_k} \end{aligned} \quad (40)$$

根据式(38)和式(40), $q^{(i+1)}(\ell_{1:K})$ 可以更新为伯努利分布. 随机变量 $\ell_k$ 取0和1时的概率分别为

$$p^{(i+1)}(\ell_k = 1) = \Lambda_k^{(i+1)} \exp(0.5mE^{(i)}(\log(\lambda_k)) - 0.5E^{(i)}(\log|\mathbf{R}|) - 0.5E^{(i)}(\lambda_k)\text{tr}(\mathbf{B}_k^{(i+1)}\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{R}^{-1})) + E^{(i)}(\log\bar{\pi}_k)) \quad (41)$$

$$p^{(i+1)}(\ell_k = 0) = \Lambda_k^{(i+1)} \exp(0.5mE^{(i)}(\log(\lambda_k)) - 0.5E^{(i)}(\log|\mathbf{R}|) - 0.5E^{(i)}(\lambda_k)\mathbf{y}_k^T\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{R}^{-1})\mathbf{y}_k + E^{(i)}(\log(1 - \bar{\pi}_k))) \quad (42)$$

其中,

$$\mathbf{B}_k^{(i+1)} = \mathbf{E}((\mathbf{y}_k - h_k(\mathbf{x}_k))(\mathbf{y}_k - h_k(\mathbf{x}_k))^T) \quad (43)$$

$\Lambda_k^{(i+1)}$ 为第 $i+1$ 次迭代的归一化常数.

(3) 当 $\Theta_{1:K}$ 中的元素为 $\lambda_{1:K}$ 时,利用式(18)和式(20), $q^{(i+1)}(\lambda_k)$ 可以更新为 $q^{(i+1)}(\lambda_k) = G(\lambda_k; \hat{\eta}_k^{(i+1)}, \hat{\eta}_k^{(i+1)})$ .  $\hat{\eta}_k^{(i+1)}$ ,  $\hat{\eta}_k^{(i+1)}$ 分别为

$$\hat{\eta}_k^{(i+1)} = 0.5m + 0.5E^{(i)}(\nu) \quad (44)$$

$$\hat{\eta}_k^{(i+1)} = 0.5(1 - E^{(i)}(\ell_k))\mathbf{y}_k^T\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{R}^{-1})\mathbf{y}_k + 0.5 \times E^{(i)}(\ell_k)\text{tr}(\mathbf{B}_k^{(i+1)}\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{R}^{-1})) + 0.5E^{(i)}(\nu) \quad (45)$$

(4) 当 $\Theta_{1:K}$ 中的元素为 $\bar{\pi}_{1:K}$ 时,利用式(18)和式(20), $q^{(i+1)}(\bar{\pi}_{1:K})$ 可以更新为 $q^{(i+1)}(\bar{\pi}_{1:K}) = \text{Be}(\bar{\pi}_k; \phi_k^{(i+1)}, \varphi_k^{(i+1)})$ ,其中,

$$\begin{cases} \phi_k^{(i+1)} = E^{(i)}(\ell_k) + e_0, \\ \varphi_k^{(i+1)} = 1 - E^{(i)}(\ell_k) + e_1 \end{cases} \quad (46)$$

(5) 当 $\Theta_{1:K}$ 中的元素为 $\nu$ 时,利用式(18)得 $\log q^{(i+1)}(\nu)$

$$= (g_0 - 1)\log(\nu) - h_0\omega + \sum_{k=1}^K \{0.5\nu \log(0.5\nu) - \log \Gamma(0.5\nu) + (0.5\nu - 1)E^{(i)}(\log \lambda_k) - 0.5\nu E^{(i)}(\lambda_k)\} + c_\nu \quad (47)$$

因式(47)包含 $\log \Gamma(0.5\nu)$ ,很难直接更新参数 $\nu$ 后验 PDF. 于是,引入 Stirling 近似等式<sup>[10]</sup>. 即 $\log(\Gamma(0.5\nu)) \approx (0.5\nu - 0.5)\log(0.5\nu) - 0.5\nu$ . 将 Stirling 近似等式代入式(47)后,根据式(20), $q^{(i+1)}(\nu)$ 可更新为 $q^{(i+1)}(\nu) = G(\nu; \hat{g}_k^{(i+1)}, \hat{h}_k^{(i+1)})$ . 形状参数 $\hat{g}_k^{(i+1)}$ 和比率参数 $\hat{h}_k^{(i+1)}$ 可更新为:

$$\hat{g}_k^{(i+1)} = g_0 + 0.5K \quad (48a)$$

$$\hat{h}_k^{(i+1)} = -0.5 \sum_{k=1}^K \{E^{(i)}[(\log \lambda_k)] - E^{(i)}(\lambda_k)\} + h_0 - 0.5K \quad (48b)$$

同理, $q^{(i+1)}(\omega)$ 可更新为 $q^{(i+1)}(\omega) = G(\omega; \hat{s}_k^{(i+1)}, \hat{r}_k^{(i+1)})$ . 形状参数 $\hat{s}_k^{(i+1)}$ 和比率参数 $\hat{r}_k^{(i+1)}$ 可更新为:

$$\hat{s}_k^{(i+1)} = s_0 + 0.5K \quad (49)$$

$$\hat{r}_k^{(i+1)} = -0.5 \sum_{k=1}^K \{E^{(i)}[(\log \mathbf{s}_{k-1})] - E^{(i)}(\mathbf{s}_{k-1})\} + r_0 - 0.5K \quad (50)$$

(6) 当 $\Theta_{1:K}$ 中的元素为 $\mathbf{Q}\nu$ 时,根据式(18)和式(20), $q^{(i+1)}(\mathbf{Q})$ 可以更新为 $q^{(i+1)}(\mathbf{Q}) = \text{IW}(\mathbf{Q}; \hat{\ell}_k^{(i+1)}, \hat{\mathbf{T}}_k^{(i+1)})$ . 同理, $q^{(i+1)}(\mathbf{R})$ 可以更新为 $q^{(i+1)}(\mathbf{R}) = \text{IW}(\mathbf{R}; \hat{u}_k^{(i+1)}, \hat{\mathbf{U}}_k^{(i+1)})$ . 其中,参数 $\hat{\ell}_k^{(i+1)}$ ,  $\hat{\mathbf{T}}_k^{(i+1)}$ ,  $\hat{u}_k^{(i+1)}$ ,  $\hat{\mathbf{U}}_k^{(i+1)}$ 分别为

$$\hat{\ell}_k^{(i+1)} = t_0 + K \quad (51a)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_k^{(i+1)} = \mathbf{T}_0 + \sum_{i=1}^K E^{(i)}(\mathbf{s}_{k-1})\mathbf{A}_k^{(i+1)} \quad (51b)$$

$$\hat{u}_k^{(i+1)} = u_0 + K \quad (52a)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_k^{(i+1)} = \mathbf{U}_0 + \sum_{i=1}^K \{E^{(i)}(\ell_k)E^{(i)}(\lambda_k)\mathbf{B}_k^{(i+1)} + (1 - E^{(i)}(\ell_k))E^{(i)}(\lambda_k)\mathbf{C}_k^{(i+1)}\} \quad (52b)$$

其中,

$$\mathbf{C}_k^{(i+1)} = \mathbf{y}_k\mathbf{y}_k^T \quad (53)$$

接下来,计算求解近似后验 PDF 时所需的期望. 根据 Gamma 分布、伯努利分布和 Beta 分布的性质可得

$$E^{(i+1)}(\mathbf{s}_{k-1}) = \boldsymbol{\alpha}_{k-1}^{(i+1)} / \boldsymbol{\beta}_{k-1}^{(i+1)} \quad (54a)$$

$$E^{(i+1)}(\log(\mathbf{s}_{k-1})) = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}_{k-1}^{(i+1)}) - \log \boldsymbol{\beta}_{k-1}^{(i+1)} \quad (54b)$$

$$E^{(i+1)}(\lambda_k) = \hat{\eta}_k^{(i+1)} / \hat{\eta}_k^{(i+1)} \quad (54c)$$

$$E^{(i+1)}(\log(\lambda_k)) = \boldsymbol{\psi}(\hat{\eta}_k^{(i+1)}) - \log \hat{\eta}_k^{(i+1)} \quad (54d)$$

$$E^{(i+1)}(\ell_k) = \frac{p^{(i+1)}(\ell_k = 1)}{p^{(i+1)}(\ell_k = 1) + p^{(i+1)}(\ell_k = 0)} \quad (54e)$$

$$E^{(i+1)}(\log(\bar{\pi}_k)) = \boldsymbol{\psi}(\phi_k^{(i+1)}) - \boldsymbol{\psi}(\phi_k^{(i+1)} + \varphi_k^{(i+1)}) \quad (54f)$$

$$E^{(i+1)}(\log(1 - \bar{\pi}_k)) = \boldsymbol{\psi}(\varphi_k^{(i+1)}) - \boldsymbol{\psi}(\phi_k^{(i+1)} + \varphi_k^{(i+1)}) \quad (54g)$$

### 3.4 基于变分贝叶斯推理的机动目标跟踪算法

本文所提用于量测丢失的机动目标跟踪算法总结如算法1所示.

### 4 仿真实验验证

以机载雷达跟踪空中目标为例,验证本文所提 RVBSD 算法的有效性. 参考文献[15, 16, 20]设置了本文的仿真场景. 假设空中目标做恒速转弯模型运动,即

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} + \bar{\mathbf{w}}_{k-1}$$

$$\mathbf{y}_k = \ell_k \begin{bmatrix} \sqrt{(x_k - x_k^t)^2 + (y_k - y_k^t)^2 + (z_k - z_k^t)^2} \\ \arctan\left(\frac{y_k - y_k^t}{x_k - x_k^t}\right) \\ \arctan\left(\frac{z_k - z_k^t}{\sqrt{(x_k - x_k^t)^2 + (y_k - y_k^t)^2}}\right) \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{v}}_k$$

**算法 1 基于变分贝叶斯推理的机动目标跟踪算法**

**输入:**  $\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}, A_{k-1}, C_k, y_{1:k}, t_0, T_0, u_0, U_0, s_0, r_0, g_0, h_0, e_0, e_1, N, K$

**输出:**  $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}$

**初始化:**

$\hat{t}^0 \leftarrow t_0, \hat{u}^0 \leftarrow u_0, \hat{T}^0 \leftarrow T_0, \hat{U}^0 \leftarrow U_0, \hat{s}^0 \leftarrow s_0, \hat{r}^0 \leftarrow r_0, \hat{g}^0 \leftarrow g_0, \hat{h}^0 \leftarrow h_0, \hat{e}^0 \leftarrow e_0$

计算

$E^{(0)}(\log(1 - \bar{\pi}_k)) = \psi(e_1) - \psi(e_0 + e_1), E^{(0)}(\lambda_k) = 1, E^{(0)}(\bar{\pi}_k) = 1$

$E^{(0)}(\log(\bar{\pi}_k)) = \psi(e_0) - \psi(e_0 + e_1), E^{(0)}(\ell_k) = 1, E^{(0)}(s_{k-1}) = 1,$

当  $i = 0: N - 1$  时执行

**%前向传播**

当  $k = 1: K$  时执行

利用式(23)、式(24)~(31)分别更新

$\hat{Q}_{k-1}^{(i)}, \hat{R}_k^{(i)}, \hat{x}_{k|k-1}^{(i+1)}, P_{k|k-1}^{(i+1)}, \hat{x}_{k|k}^{(i+1)}$  和  $P_{k|k}^{(i+1)}$ ;

结束

**%后向传播**

当  $k = K - 1: 0$  时执行

根据式(32)~(34)计算  $M_k^{(i+1)}, \hat{x}_{k|k}^{(i+1)}, P_{k|k}^{(i+1)}$ ;

结束

当  $k = 1: K$  时执行

分别利用式(37)、式(42)和式(53)计算  $A_k^{(i+1)}, B_k^{(i+1)}$  和  $C_k^{(i+1)}$ ;

分别利用式(36)、式(41)、式(44)~(52)更新  $q^{(i+1)}(s_{k-1})$

和  $q^{(i+1)}(\ell_k), q^{(i+1)}(\lambda_k), q^{(i+1)}(\bar{\pi}_k), q^{(i+1)}(\nu)$

和  $q^{(i+1)}(\omega), q^{(i+1)}(Q)$  和  $q^{(i+1)}(R)$

利用式(54)计算近似后验所需的期望;

结束

结束

$\hat{x}_{k|k} \leftarrow \hat{x}_{k|k}^N, P_{k|k} \leftarrow P_{k|k}^N$

$$\text{其中, } F = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\dot{w}T)/\dot{w} & (1 - \cos(\dot{w}T))/\dot{w}^2 \\ 0 & \cos(\dot{w}T) & \sin(\dot{w}T)/\dot{w} \\ 0 & -\dot{w} \sin(\dot{w}T) & \cos(\dot{w}T) \end{bmatrix}, \mathbf{x}_k =$$

$[x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k, y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k, z_k, \dot{z}_k, \ddot{z}_k]^T$ . 采样时间为  $T = 0.5$  s, 转弯速率为  $\dot{w} = 0.13/\pi$  rad/s.  $x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k, y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k, z_k, \dot{z}_k, \ddot{z}_k$  依次为目标的位置、速度和加速度. 空中目标初始的协方差和状态分别  $P_{0|0} = I$  和  $\mathbf{x}_0 = [25000, -10, 0, 4000, -83.3, 0, 1000, 10, 0]^T$ . 以  $S_0 = [1000, 0, 0, 1000, 0, 0, 2000, 0, 0]^T$  为圆心在  $XOY$  平面内做圆周运动. 机载平台以半径为 100. 机载平台的位置  $s_k' = (x_k', y_k', z_k')$  可以直接从全球定位系统 (Global Positioning System, GPS) 中读取. 采用闪烁噪声来模拟长拖尾的非高斯过程噪声  $\bar{\mathbf{w}}_{k-1}$  和测量噪声  $\bar{\mathbf{v}}_k$

$$\bar{\mathbf{w}}_{k-1} \sim \begin{cases} N(0, \hat{Q}), & \text{w.p. } 0.8 \\ N(0, 10\hat{Q}), & \text{w.p. } 0.2 \end{cases}$$

$$\bar{\mathbf{v}}_k \sim \begin{cases} N(0, \hat{R}), & \text{w.p. } 0.8 \\ N(0, 25\hat{R}), & \text{w.p. } 0.2 \end{cases}$$

“w.p.”表示发生的概率,  $\hat{Q}, \hat{R}$  分别为名义上的过程噪声

协方差和量测噪声协方差, 即,  $\hat{Q} = \text{diag}([1, 0.1, 0.1])$ ,  $\hat{Q} = \text{blkdiag}([\hat{Q}, \hat{Q}, \hat{Q}])$ ,  $\hat{R} = \text{diag}([4, 4 \times 10^{-3}, 4 \times 10^{-3}])$ . 其中, 符号“diag”表示对角矩阵, 符号“blkdiag”表示块对角矩阵.

**4.1 算法估计性能验证**

本小节设置如下形式的目标检测概率:

$$\text{情形 1: } \pi_k = \begin{cases} 0.7, & K/3 \leq k < 2K/3 \\ 0.9, & \text{其他} \end{cases}$$

其中,  $K = 200$  表示总的仿真步长. 为了验证所提 RVB-SD 算法的有效性, 本文分别针对上述 5 种情况, 采用如下的算法进行对比: 标准的容积卡尔曼平滑器 (Cubature Kalman Smoother, CKS)<sup>[21]</sup>, 基于量测丢失的容积卡尔曼平滑器 (Cubature Kalman Smoother for measurement Drop, CKSD)<sup>[11]</sup>, 基于未知过程和量测噪声协方差的变分贝叶斯容积卡尔曼平滑器 (Variational Bayesian based Cubature Kalman Smoother with unknown parameters QR, VBCKS\_QR)<sup>[6]</sup>, 基于未知自由度参数的变分贝叶斯容积卡尔曼平滑器 (Variational Bayesian based Cubature Kalman Smoother with unknown parameters wv, VBCKS\_wv)<sup>[10]</sup>, 基于噪声参数未知的变分贝叶斯平滑器 (Variational Bayesian based Cubature Kalman Smoother with unknown parameters QRwv, VBCKS\_QRwv)<sup>[10]</sup>. CKS 和 CKSD 方法的噪声协方差分别设为  $\hat{Q}, \hat{R}$ . VBCKS\_QR 方法的初始噪声参数为  $t_0 = 6, T_0 = \hat{Q}, u_0 = 4, U_0 = 5\hat{R}$ . VBCKS\_QRwv 方法的初始参数为  $s_0 = r_0 = g_0 = 3$  且  $h_0 = 3$ . 本文所提 RVB-SD 算法初始参数值分别为  $r_0 = h_0 = g_0 = s_0 = 3, T_0 = \hat{Q}, U_0 = 5\hat{R}, t_0 = 6, u_0 = 4, e_1 = e_0 = 0.5$ . 根据高斯分布  $N(\mathbf{x}_0, P_{0|0})$  随机选择初始的状态估计  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ . 蒙特卡洛迭代次数和变分迭代次数  $N$  分别为 500 和 10. 为了评价上述算法的性能, 选用均方根误差 (Root Mean Square Errors, RMSEs)、平均均方根误差 (Average Root Mean Square Errors, ARMSEs)、绝对误差 (Absolute Value Biases, AVBs) 以及平均绝对误差 (Averaged Absolute Value Biases, AAVBs) 作为性能评价指标<sup>[22]</sup>. 上述所有的状态估计算法都在 Matlab2020a 仿真平台上运行, 选用的计算机型号为: Intel Core i7-9750H CPU@2.60 GHz.

图 2 展示了采用上述 6 种算法所得的目标轨迹跟踪示意图. 图 3 分别描述了上述 6 种算法的位置 RMSEs、速度 RMSEs 以及加速度 RMSEs 结果图. 图 4 是与之相对应的位置 AVBs、速度 AVBs 以及加速度 AVBs 结果图. 表 1 和表 2 分别是基于 500 次蒙特卡洛仿真得出的位置 ARMSEs、速度 ARMSEs、加速度 ARMSEs、位置 AAVBs、速度 AAVBs 以及加速度 AAVBs. 此外, 表 1 还

给出了上述6种算法的计算代价.

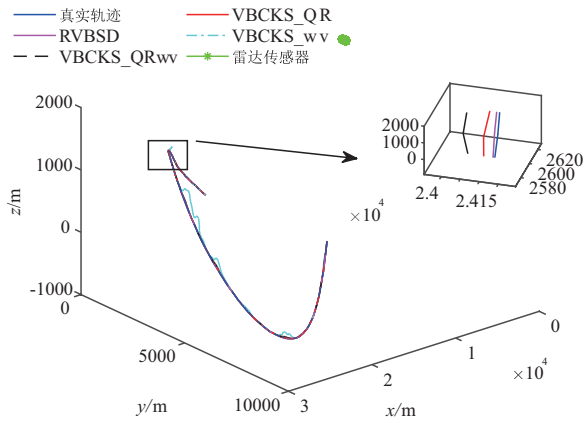


图2 雷达目标跟踪轨迹

从图2可以看出,本文所提RVBSD算法估计的轨迹更贴近真实的目标运动轨迹.此外,从图3、图4可以看出,本文所提的RVBSD算法具有较小的位置RMSEs、速度RMSEs、加速度RMSEs、位置AAVBs、速度AAVBs以及加速度AAVBs.这也验证了本文所提算法的有效性.虽然本文所提的RVBSD算法与其他5种算法相比耗时相对较长,但是为了获得较高的估计精度,牺牲一定的时间成本也是允许的.总体而言,本文所提RVBSD算法是有效的.

量测预测补偿的策略,但是由于将系统噪声等价于高斯噪声,进行状态估计时并不能很好地刻画非高斯噪声的长拖尾特性.与CKS算法和CKSD算法相比,剩余的三种对比算法均是将系统噪声建模为学生t分布.在某种程度上,它们能刻画非高斯噪声的长拖尾特性.但是VBCKS\_QR算法和VBCKS\_wv算法分别针对未知学生t分布的尺度参数和自由度参数进行估计,不适用于二者均未知的场景.虽然VBCKS\_QRwv算法可以联合估计未知学生t分布的尺度和自由度参数,但与VBCKS\_QR算法和VBCKS\_wv算法类似,未考量测丢失的情况.而本文所提的RVBSD算法不仅能联合估计未知学生t分布中的自由度参数和尺度参数,还考虑了量测丢失对状态估计的影响.综上所述,本文所提的RVBSD算法能更好地跟踪目标的轨迹.

此外,如表1和表2所示,本文所提RVBSD算法有较小的位置ARMSEs、速度ARMSEs、加速度ARMSEs、位置AAVBs、速度AAVBs以及加速度AAVBs.这也验证了本文所提算法的有效性.虽然本文所提的RVBSD算法与其他5种算法相比耗时相对较长,但是为了获得较高的估计精度,牺牲一定的时间成本也是允许的.总体而言,本文所提RVBSD算法是有效的.

#### 4.2 不同检测概率下算法估计性能验证

为了验证不同检测概率下本文算法的估计性能,

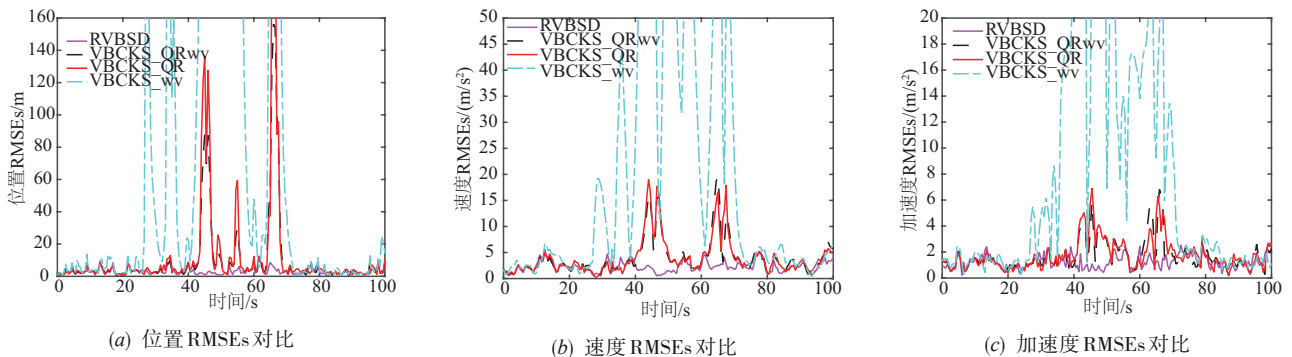


图3 状态估计RMSEs对比

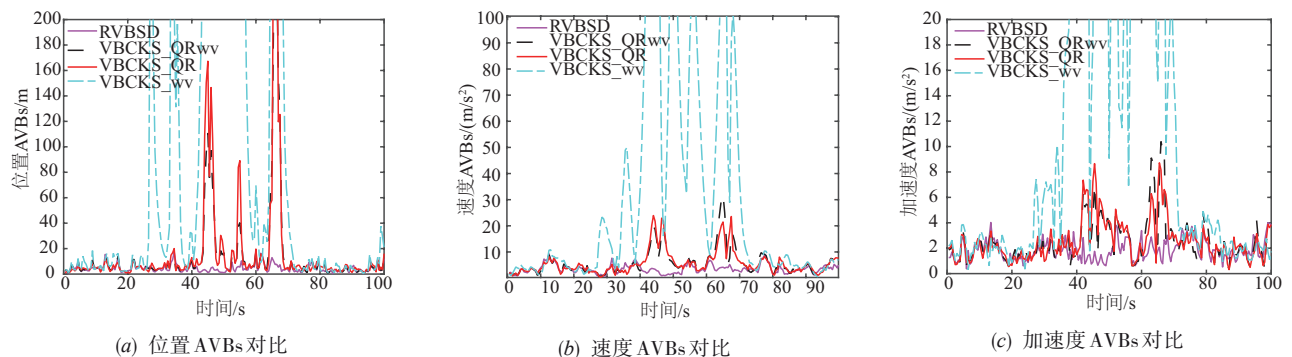


图4 状态估计AVBs对比

表1 状态估计的 RMSEs 对比

方法	位置 ARMSEs	速度 ARMSEs	加速度 ARMSEs	时间 (s)
RVBSD	3.4328	2.3616	1.2866	0.4516
CKS	6761.45	1239.73	453.93	0.0188
CKSD	4741.39	135.017	5.7307	0.0213
VBCKS_QR <sub>wv</sub>	6.1291	3.0761	1.5639	0.3992
VBCKS_QR	7.0944	3.1896	1.5742	0.3950
VBCKS_wv	85.6035	19.4387	6.8943	0.3960

表2 状态估计的 AAVBs 对比

方法	位置 AAVBs	速度 AAVBs	加速度 AAVBs
RVBSD	5.1441	3.5477	1.924
CKS	8667.60	1601.73	578.04
CKSD	6756.31	182.64	8.4287
VBCKS_QR <sub>wv</sub>	8.8643	4.5505	2.317
VBCKS_QR	10.408	4.8979	2.3106
VBCKS_wv	106.56	24.479	8.7954

除情形 1 外,还采用如下几种形式的目标检测概率进行对比分析.

$$\text{情形 2: } \pi_k = \begin{cases} 0.8, & K/3 \leq k < 2K/3 \\ 0.9, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{情形 3: } \pi_k = \begin{cases} 0.6, & K/3 \leq k < 2K/3 \\ 0.9, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{情形 4: } \pi_k = \begin{cases} 0.5, & K/3 \leq k < 2K/3 \\ 0.9, & \text{其他} \end{cases}$$

情形 5:

$$\pi_k = \begin{cases} 0.7, & K/4 \leq k < K/2, 3K/4 \leq k \leq K \\ 0.9, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{情形 6: } \pi_k = \begin{cases} 0.7, & K/3 \leq k \leq K \\ 0.9, & \text{其他} \end{cases}$$

鉴于 4.1 节已经验证本文算法的优势,为节省篇幅,本小节省略了其他算法的结果分析.除了目标检测概率,其他参数的设置均同 4.1 节.表 3 和表 4 分别给出了不同目标检测情形下位置 ARMSEs、速度 ARMSEs、加速度 ARMSEs、位置 AAVBs、速度 AAVBs 以及加速度 AAVBs 的统计结果.

首先,值得肯定的是,本文所提的算法在情形 1~3 下取得了较好的跟踪结果.这进一步验证了本文所提算法的有效性.此外,从目标检测概率  $\pi_k$  在  $K/3 \leq k < 2K/3$  区间取不同概率值来看,随着目标检测概率  $\pi_k$  的减少,状态估计的性能大致呈下降趋势.从相同的目标检测概率  $\pi_k$  在不同区间的取值来看,越长的采样区间遭受强杂波(即较低的目标检测概率),状态估计的性能总体呈下降的趋势.需要特别注意的是,当目标检测概率分别取情形 4 和

表3 不同目标检测情形下状态估计的 RMSEs 对比

情形	位置 ARMSEs	速度 ARMSEs	加速度 ARMSEs
1	3.4328	2.3616	1.2866
2	3.0782	1.8206	1.101
3	4.2133	2.3614	1.1414
4	15794.3	519.27	36.708
5	14.1213	4.3291	1.6998
6	2968.90	118.591	5.598

表4 不同目标检测情形下状态估计的 AAVBs 对比

情形	位置 AAVBs	速度 AAVBs	加速度 AAVBs
1	5.1441	3.5477	1.924
2	4.6013	2.7761	1.6323
3	6.1762	3.407	1.6653
4	20875.2	685.78	45.707
5	19.8595	6.4589	2.5116
6	4076.759	175.585	8.1953

情形 6 时,都出现了滤波发散问题.这主要是因为随着目标检测概率的降低,收集的量测中包含有用的状态估计信息缺失严重.同样,当目标检测概率受强杂波影响的区间越多,强杂波淹没目标的有用信息越多,进而使雷达传感器难以接收到有效的量测对状态进行估计,出现了滤波发散问题.因此,为了有效的进行目标状态的估计,目标的检测概率不能太低,遭受强杂波的时间(即区间)也不能太长,否则无法收集到目标的有用信息对状态进行估计.总体来说,本文提出的算法能鲁棒地、有效地应对强杂波的干扰,对目标的状态进行估计.

## 5 结论

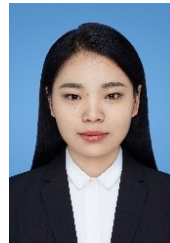
本文设计了强杂波背景下含量测丢失的目标跟踪算法.该算法采用学生 t 分布来模拟非高斯噪声的长拖尾特性.通过引入伯努利随机变量,将求和形式的后验概率密度函数转换成乘积形式的概率质量函数,并构建了分层状态空间模型.在此基础上,设计了用于量测丢失的鲁棒变分贝叶斯平滑器.以机载雷达跟踪空中目标为例验证了本文算法的有效性.

## 参考文献

- [1] 魏立兴,孙合敏,吴卫华,等.改进的 GM-CBMeMber 机载多普勒雷达多目标跟踪算法[J].空军预警学院学报,2017,31(3): 162-166.  
WEI Li-xing, SUN He-min, WU Wei-hua, et al. An improved multi-target tracking algorithm based on GM-CBMeMber for airborne Doppler radar[J]. Journal of Air Force Early Warning Academy, 2017, 31(3): 162-166. (in Chinese)
- [2] SALARI S, CHAN F, CHAN Y T, et al. Compressive sensing-based joint range-doppler and clutter estimation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2019, 55(6): 3207-3217.

- [3] KUANG C M, WANG C J, WEN BY, et al. An improved CA-CFAR method for ship target detection in strong clutter using UHF radar[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2020, 27: 1445-1449.
- [4] SANGSTON K J, GINI F, GRECO M S. Coherent radar target detection in heavy-tailed compound Gaussian clutter[J]. IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems, 2012, 48(1): 64-77.
- [5] 刘宝泉, 刘春静, 代泽洋. 机载预警雷达 KA-STAP 杂波抑制方法研究[J]. 雷达科学与技术, 2019, 17(4): 396-400.  
LIU Bao-quan, LIU Chun-jing, DAI Ze-yang. A KA-STAP based clutter suppression method for airborne early warning radar[J]. Radar Science and Technology, 2019, 17(4): 396-400. (in Chinese)
- [6] ARDESHIRI T, OZKAN E, ORGUNER U. Approximate Bayesian smoothing with unknown process and measurement noise covariances[J]. IEEE Signal Processing Letter. 2015, 22(12): 2450-2454.
- [7] ZHAO J B, MILI L, et al. Robust unscented Kalman filter for power system dynamic state estimation with unknown noise statistics[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2019, 10(2): 1215-1224.
- [8] ZHAO J B, MILI L. A decentralized H-infinity unscented Kalman filter for dynamic state estimation against uncertainties[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2019, 10(5): 4870-4880.
- [9] XU H, XIE W C, YUAN H D, et al. Fixed-point iteration Gaussian sum filtering estimator with unknown time-varying non-Gaussian measurement noise[J]. Signal Processing, 2018, 153: 132-142.
- [10] HUANG Y L, ZHANG Y G, Li N, et al. A robust Gaussian approximate fixed-interval smoother for nonlinear systems with heavy-tailed process and measurement noises[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2016, 23(4): 468-472.
- [11] MA K, XU L, FAN H. Unscented Kalman filtering for target tracking systems with packet dropout compensation[J]. IET Control Theory & Applications, 2019, 13(12): 1901-1908.
- [12] JIANG S, FANG H J, et al. Fault estimation for nonlinear networked systems with time-varying delay and random packet dropout[J]. Asian Journal of Control, 2012, 16(1): 126-137.
- [13] PUNCHIHEWA Y G, VO B T, VO B N, et al. Multiple object tracking in unknown backgrounds with labeled random finite sets[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018, 66(11): 3040-3055.
- [14] LI G H, K L J, YI W, et al. Robust Poisson multi-Bernoulli mixture filter with unknown detection probability[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2021, 70(1): 886-899.
- [15] BILIK I, TABRIKIAN J. Maneuvering target tracking in the presence of glint using the nonlinear Gaussian mixture Kalman filter[J]. IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems, 2010, 46(1): 246-262.
- [16] DONG P, JING Z L, LEUNG H, et al. The labeled multi-Bernoulli filter for multitarget tracking with glint noise[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2019, 55(5): 2253-2268.
- [17] BORDEN B, MUMFORD M. A statistical glint/radar cross section target model[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1983, AES-19(1): 781-785.
- [18] BISHOP C M. Pattern Recognition and Machine Learning (Information Science and Statistics) [M]. New York: Springer-Verlag, 2006.
- [19] SIMO S. Bayesian Filtering and Smoothing[M]. New York: Cambridge University Press, 2013.
- [20] PETSIOS M N, ALIVIZATOS E G, UZUNOGLU N K. Manoeuvring target tracking using multiple bistatic range and range-rate measurements[J]. Signal Processing, 2007, 87(4): 665-686.
- [21] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Cubature Kalman smoothers[J]. Automatic, 2011, 47(10): 2245-2250.
- [22] 黄玉龙. 高精度状态估计方法研究及其在目标跟踪和协同定位中的应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2019.

#### 作者简介



**李淑慧** 女, 1991年出生于河南省商丘市. 博士研究生. 主要研究方向为目标跟踪、多传感器融合、状态估计.  
E-mail: 2579371789@qq.com



**邓志红** 女, 1974年出生于辽宁省昌图县. 现为北京理工大学自动化学院教授, 博士生导师. 主要从事导航制导与控制领域的研究工作.  
E-mail: dzh\_deng@bit.edu.cn



**冯肖雪** 女, 1988年出生于河北省邢台市. 现为北京理工大学自动化学院讲师, 从事多源信息融合、状态估计方面的研究工作.  
E-mail: fengxiaoxue@bit.edu.cn